



① اگر $f(x) = \frac{x^2+ax}{5x^2+3x}$ تابعی ثابت و $g(x) = \frac{x^2-2x}{bx^2-2}$ تابعی همانی باشد، حاصل $5a-b$ کدام است؟

۴) صفر

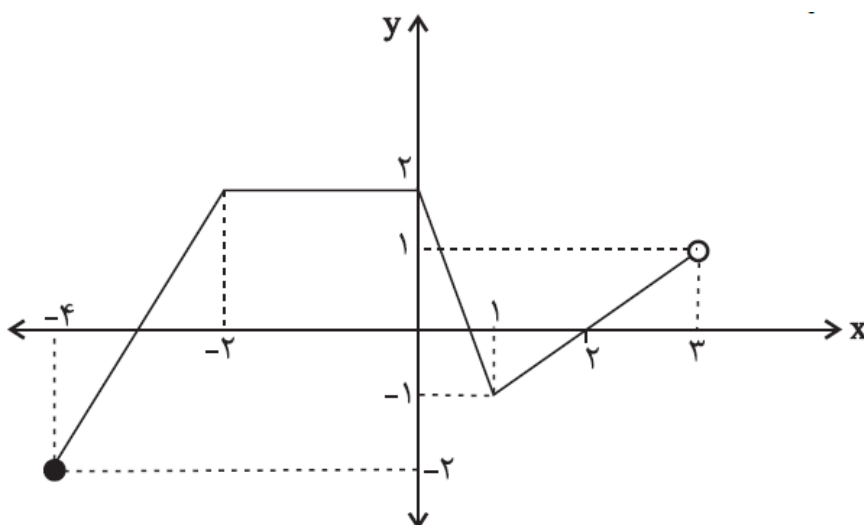
۳) ۲

۲) -۱

۱) ۱

② اگر نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b; & -4 \leq x < -2 \\ cx+d; & -2 \leq x < 0 \\ ex+f; & 0 \leq x < 1 \\ gx+h; & 1 \leq x < 3 \end{cases}$ به شکل زیر باشد، حاصل

$a+b+c+d+e+f+g+h$ کدام است؟



۴) ۸

۳) ۴

۲) ۶

۱) ۲

③ اگر تابع $f = \{(2, b), (a^2 - 1, 3), (a, -b)\}$ همانی باشد، کدامیک از توابع زیر در دامنه‌اش همانی است؟

$$y = \frac{x^2+a}{x-2} \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2-2x+2(a+b)}{x-b} \quad (4)$$

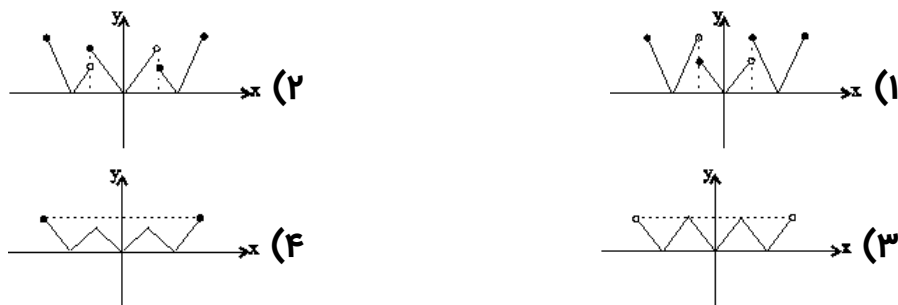
$$y = \frac{x^2+bx}{x+a} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2-2a}{x+2} \quad (3)$$

④ در تابع چندجمله‌ای $f(x)$ اگر تساوی $f(x+1) = x^2 + 4x$ برقرار باشد، آن‌گاه حاصل $f(x-1)$ کدام است؟

۴) $x^2 + 2x - 3$ ۳) $4x - x^2$ ۲) $x^2 - 4x$ ۱) $x^2 - 4$

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} |x+1| & -2 \leq x < -\frac{1}{2} \\ |x| & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ |x-1| & \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$ شبیه کدام نمودار زیر است؟ (۵)



نمودار تابع $y = |x-1|$ را یک واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم. سپس نمودار را روی محور x ها، ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. در این صورت ضابطه تابع جدید کدام است؟ (۶)

(۱) $y = |x+1| - 1$ (۲) $y = -|x-3| + 1$ (۳) $y = -|x+1| + 1$ (۴) $y = |x-1| - 1$

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$ ، آنگاه حاصل $\left| \frac{f(1-\sqrt{2})}{f(\sqrt{2}-1)} \right|$ کدام است؟ (۷)

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2} - 1$ (۳) ۱ (۴) $1 + \sqrt{2}$

اگر تابع $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{3x^2 - 2x + 1}$ همانی باشد، در این صورت مساحت ناحیه محصور بین توابع خطی $y = ax + d$ ، $y = bx + c$ و تابع ثابت $y = a$ کدام است؟ (۸)

(۱) $2/4$ (۲) ۳ (۳) $3/6$ (۴) $4/2$

اگر f یک تابع ثابت و g یک تابع همانی، هر دو با دامنه اعداد حقیقی باشند و $g(1) = 3f(0) + 2(f(-1))$ ، آنگاه اختلاف کمترین و بیشترین مقدار عبارت $g(2) + (f(-5))^2$ کدام است؟ (۹)

(۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۲

اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^3 - 3}{x^2 + x + 1} + mx + n$ یک تابع همانی باشد، $n - m$ کدام است؟ (۱۰)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۵

با در نظر گرفتن بازه $[-1, 3]$ به عنوان دامنه تابع $f(x) = 2 - |x-2|$ ، بُرد آن کدام بازه خواهد بود؟ (۱۱)

(۱) $[-1, 1]$ (۲) $[-1, 2]$ (۳) $[-1, 3]$ (۴) $[-3, 1]$

اگر $f(x) = ax^3 + (b-a)x + 4$ به طوری که $f(-3) = 6$ باشد، آنگاه $f(3)$ کدام است؟ (۱۲)

(۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۳) اگر $f(x) = \begin{cases} 4x^2 & x > 1 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ ، آنگاه اشتراک دامنه و برد تابع f شامل چند عدد صحیح نمی‌شود؟

- ۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۴) اگر رابطه $A = \{(0, \sqrt{(a-\sqrt{a})^2}), (0, \sqrt[3]{(a-\sqrt{a})^3}), (1, \sqrt[6]{b^2}), (1, \sqrt[6]{b})\}$ تابع باشد، کدام گزینه درست است؟

- ۱) $\begin{cases} a \in [1, +\infty) \\ b \in [0, +\infty) \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} a \in [1, +\infty) \\ b \in (-\infty, 0) \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} a \in (0, 1) \\ b \in [0, +\infty) \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} a \in (0, 1) \\ b \in (-\infty, 0) \end{cases}$

۱۵) فرض کنید f تابعی است که به ازای هر عدد حقیقی مانند x در تساوی $f(x) = x^2(f(x-1) - 1)$ صدق می‌کند. حاصل $f(2)$ ، کدام است؟

- ۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) -۳۰ ۴) -۸

۱۶) نمودار یک تابع درجه دوم از نقاط $(-1, -1)$ ، $(1, 11)$ و $(0, 2)$ می‌گذرد. اگر این نمودار را در امتداد محور x ‌ها، ۴ واحد در جهت مثبت و در امتداد محور y ‌ها ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار تابع جدید، محور y ‌ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

- ۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

۱۷) نمودار تابع $f(x) = x^2$ را ابتدا یک واحد در امتداد محورهای به سمت پایین و سپس نمودار حاصل را در امتداد محور x ‌ها سه واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا تابع g حاصل شود. مجموع مؤلفه‌های نقاط برخورد تابع g با محورهای مختصات، کدام است؟

- ۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۶%

قلم‌چی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۳

سوال ۱

گزینه «۳»

ثابت بودن این تابع یعنی نسبت ضرایب x^2 و x باید برابر باشند:

$$\frac{1}{5} = \frac{a}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

که در این صورت:

$$f(x) = \frac{x^2 + \frac{3}{5}x}{5x^2 + 3x} = \frac{x^2 + \frac{3}{5}x}{5(x^2 + \frac{3}{5}x)} = \frac{1}{5}$$

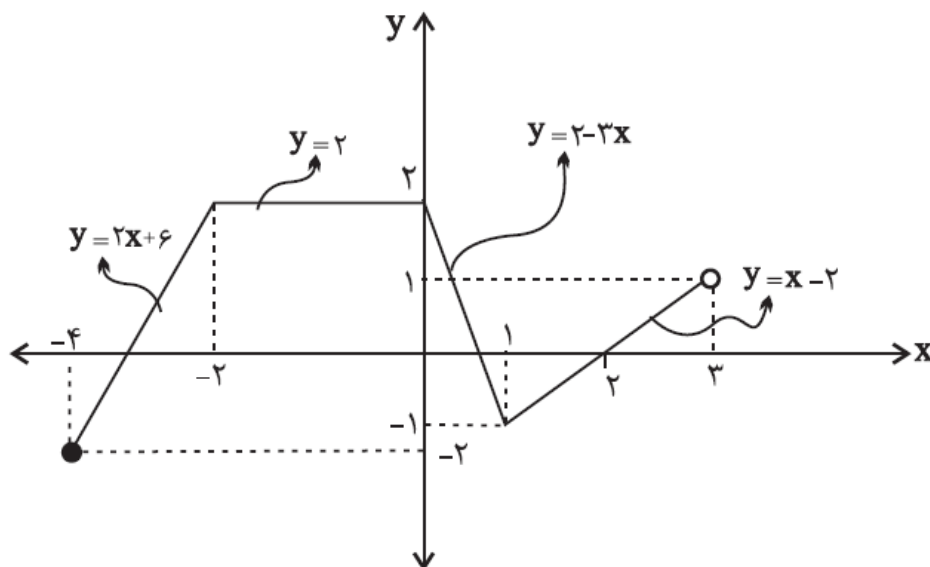
تابع همانی نیز یعنی $g(x) = x$ است پس:

$$\frac{x^3 - 2x}{bx^3 - 2x} = x \Rightarrow x^3 - 2x = bx^3 - 2x \Rightarrow b = 1$$

$$5a - b = 5 \times \frac{3}{5} - 1 = 3 - 1 = 2$$

گزینه «۴»

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6 & -4 \leq x < -2 \\ 2 & -2 \leq x < 0 \\ 2-3x & 0 \leq x < 1 \\ x-2 & 1 \leq x < 3 \end{cases}$$



$$a + b + c + d + e + f + g + h = 2 + 6 + 0 + 2 + (-3) + 2 + 1 - 2 = 8$$

گزینه «۴»

با توجه به همانی بودن تابع داریم:

$$b = 2, a = -b \Rightarrow a = -2$$

بررسی گزینه‌ها:

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x - 2} \neq x \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$y = \frac{x^2 - 2}{x - 2} \neq x \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$y = \frac{x^2 + 4}{x + 2} \neq x \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = x \quad \text{گزینه «۴»}$$

گزینه «۱»

روش اول:

$$f(x+1) = x^2 + 3x = x(x+3)$$

فرض می‌کنیم $x+1 = t$ باشد، داریم:

$$x+1 = t \Rightarrow \begin{cases} x = t-1 \\ x+3 = t+2 \end{cases} \Rightarrow f(t) = (t-1)(t+2)$$

فرض می‌کنیم $u = x-1$ باشد، پس:

$$u = x-1 \Rightarrow \begin{cases} u+1 = x \\ u+2 = x+1 \end{cases} \Rightarrow f(x-1) = (x-1)(x+2)$$

$$\Rightarrow f(x-1) = x^2 - 1$$

روش دوم:

$$f(x+1) = x^2 + 3x \Rightarrow f((x-1)+1) = (x-1)^2 + 3(x-1)$$

$$\Rightarrow f(x-1) = (x^2 - 2x + 1) + (3x - 3) = x^2 - 1$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۶٪

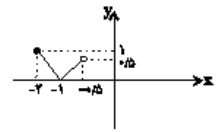
قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۴

سوال ۵

گزینه «۴»

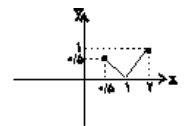
ابتدا نمودار مربوط به هر ضابطه را به طور جداگانه رسم می‌کنیم.



$$y = |x + 1|, -2 \leq x < -\frac{1}{2}$$

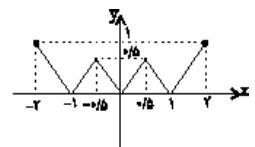


$$y = |x|, -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$$



$$y = |x - 1|, \frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

حال نمودار تابع f به صورت زیر خواهد بود.



متوسط

درصد پاسخگویی ۳۳٪

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۳

سوال ۶

گزینه «۳»

$$y = |x - 1| \xrightarrow{\text{یک واحد پایین}} y = |x - 1| - 1$$

$$\xrightarrow{\text{دو واحد به سمت چپ}} y = |x + 2 - 1| - 1$$

$$\Rightarrow y = |x + 1| - 1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به y: ها}} y = -|x + 1| + 1$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۴۱٪

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۴

سوال ۷

گزینه «۴»

$$f(\underbrace{1 - \sqrt{2}}_{\text{متغی}}) = 2$$

$$f(\underbrace{\sqrt{2} - 1}_{\text{مثبت}}) = (\sqrt{2} - 1)^2 - 1 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1 - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$\left| \frac{f(1 - \sqrt{2})}{f(\sqrt{2} - 1)} \right| = \left| \frac{2}{2 - 2\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \right| \xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \left| \frac{1 + \sqrt{2}}{-1} \right| = |-1 - \sqrt{2}|$$

$$= 1 + \sqrt{2}$$

گزینه «۱»

می‌دانیم ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است، پس داریم:

$$\Rightarrow a = ۳, b = -۲, c = ۱, d = ۰ \quad \frac{ax^۳+bx^۲+cx+d}{۳x^۳-۲x+۱} = x \Rightarrow ax^۳+bx^۲+cx+d = ۳x^۳-۲x^۲+x$$

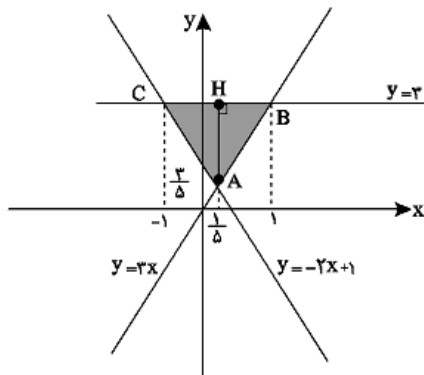
$$\Rightarrow a = ۳, b = -۲, c = ۱, d = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تابع}} y = ۳x, y = -۲x + ۱, y = ۳$$

$$\begin{cases} A : -۲x + ۱ = ۳x \Rightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow A \left| \begin{smallmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{smallmatrix} \right. \\ B : ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow B \left| \begin{smallmatrix} ۱ \\ ۳ \end{smallmatrix} \right. \\ C : -۲x + ۱ = ۳ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow C \left| \begin{smallmatrix} -۱ \\ ۳ \end{smallmatrix} \right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = ۱ - (-۱) = ۲ \\ AH = ۳ - \frac{۳}{5} = \frac{۱۲}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{۲} \times ۲ \times \frac{۱۲}{5} = \frac{۱۲}{5} = ۲/۴$$



گزینه «۱»

f تابعی ثابت است، آن را به صورت $f(x) = c$ نمایش می‌دهیم، داریم:

$$f(-۱) = f(۰) = f(-۵) = c$$

$$\text{تابع همانی} \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow g(۱) = ۱, g(۲) = ۲$$

مقادیر فوق را در رابطه جایگذاری می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$f((-۱))^۲ + ۲f(۰) = ۳g(۱) \Rightarrow c^۲ + ۲c = ۳$$

$$\Rightarrow c^۲ + ۲c - ۳ = ۰ \Rightarrow (c-۱)(c+۳) = ۰ \Rightarrow c = ۱, c = -۳$$

$$\text{از طرفی } g(۲) + f((-۵))^۲ = ۲ + c^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = ۱ \Rightarrow \text{عبارت} = ۲ + ۱ = ۳ \\ c = -۳ \Rightarrow \text{عبارت} = ۲ + ۹ = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = |۱۱ - ۳| = ۸$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۴۱٪

قلم‌چی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۴

سوال ۱۰

گزینه «۴»

باید ضابطه داده شده را ساده کنیم، تا به شکل تابع همانی $f(x) = x$ در آید:

$$f(x) = \frac{3(x^3-1)}{x^3+x+1} + mx + n = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{(x^3+x+1)} + mx + n$$

$$= 3x - 3 + mx + n$$

$$f(x) = (3+m)x + (n-3) \Rightarrow \begin{cases} 3+m=1 \Rightarrow m=-2 \\ n-3=0 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

باید $m = -2$ و $n = 3$ باشد تا به تابع $f(x) = x$ برسیم، پس:

$$n - m = 5$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۸٪

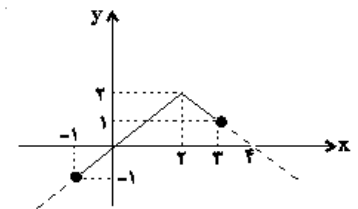
قلم‌چی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۲

سوال ۱۱

گزینه «۲»

با رسم نمودار تابع، ملاحظه می‌کنید اگر $D_f = [-1, 3]$ آنگاه $R_f = [-1, 2]$.



متوسط

درصد پاسخگویی ۴۰٪

قلم‌چی ۱۴۰۰

گزینه درست: ۳

سوال ۱۲

گزینه «۳»

$$f(-3) = 6 \Rightarrow a(-3)^3 + (b-a)(-3) + 4 = 6$$

$$\Rightarrow -27a - 3b + 3a + 4 = 6$$

$$\Rightarrow -24a - 3b = 2 \Rightarrow 24a + 3b = -2$$

$$f(3) = 27a + (b-a)(3) + 4$$

$$\Rightarrow f(3) = 27a + 3b - 3a + 4 = 24a + 3b + 4 = -2 + 4 = 2$$

سوال ۱۳

گزینه درست: ۲

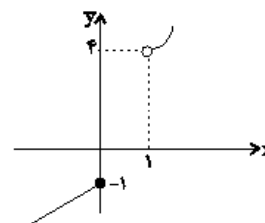
قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۷%

متوسط

گزینه «۲»

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل تابع f داریم:



$$D_f = \mathbb{R} - (0, 1]$$

$$R_f = \mathbb{R} - (-1, 4]$$

$$\Rightarrow D_f \cap R_f = \mathbb{R} - (-1, 4]$$

که شامل اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ نمی‌شود.

سوال ۱۴

گزینه درست: ۱

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۸%

متوسط

گزینه «۱»

$$A = \{(0, |a - \sqrt{a}|), (0, a - \sqrt{a}), (1, \sqrt[3]{|b|}), (1, \sqrt[3]{b})\}$$

اگر A تابع باشد، پس:

$$\begin{cases} (0, |a - \sqrt{a}|) \in A \\ (0, a - \sqrt{a}) \in A \end{cases} \Rightarrow |a - \sqrt{a}| = a - \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{a} \geq 0 \Rightarrow a \geq \sqrt{a} \Rightarrow a \geq 1$$

$$\begin{cases} (1, \sqrt[3]{|b|}) \in A \\ (1, \sqrt[3]{b}) \in A \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{|b|} = \sqrt[3]{b} \Rightarrow b \geq 0$$

سوال ۱۵

گزینه درست: ۴

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۲%

متوسط

گزینه «۴»

$$f(x) = x^x(f(x-1) - 1) \xrightarrow{x=0} f(0) = 0$$

$$\xrightarrow{x=1} f(1) = 1(f(0) - 1) = 1(0 - 1) = -1$$

$$\xrightarrow{x=2} f(2) = 2(f(1) - 1) = 2(-1 - 1) = -4$$

گزینه «۳»

می‌دانیم که معادله یک سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد و از طرفی با توجه به این‌که نمودار تابع از نقاط داده شده عبور می‌کند بنابراین این نقاط در ضابطه تابع صدق می‌کنند. یعنی:

$$\begin{aligned} f(0) = 2 &\Rightarrow 0 + 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2 \\ f(1) = 11 &\Rightarrow a + b + c = 11 \xrightarrow{c=2} a + b = 9 \\ f(-1) = -1 &\Rightarrow a - b + c = -1 \xrightarrow{c=2} a - b = -3 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a + b = 9 \\ a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 6 \end{aligned}$$

حال با توجه به ضرایب به دست آمده، ضابطه تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$a=3, b=6, c=2 \rightarrow y = 3x^2 + 6x + 2 = 3(x+1)^2 - 1$$

در این مرحله باید نمودار تابع را ۴ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا منتقل نماییم:

$$\begin{aligned} y = 3(x+1)^2 - 1 &\xrightarrow[\text{x} \rightarrow \text{x}-4]{\text{واحد به سمت راست ۴}} y = 3(x-4+1)^2 - 1 \\ &\xrightarrow[\text{واحد به سمت بالا ۲}]{\text{واحد به سمت بالا ۲}} y = 3(x-3)^2 - 1 + 2 = 3(x-3)^2 + 1 \end{aligned}$$

ضابطه تابع جدید برابر $y = 3(x-3)^2 + 1$ است و برای یافتن محل برخورد نمودار این تابع با محور yها، کافیست حاصل $f(0)$ را برای تابع جدید محاسبه کنیم:

$$\Rightarrow f(0) = 28$$

گزینه «۱»

$$f(x) = x^2 \xrightarrow[\text{ب پایین}]{\text{یک واحد}} f_1(x) = x^2 - 1 \xrightarrow[\text{به سمت راست}]{\text{سه واحد}} g(x) = (x-3)^2 - 1$$

$$g(0) = (0-3)^2 - 1 = 8 \quad \text{برخورد با محور yها}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-3=1 \Rightarrow x=4 \\ x-3=-1 \Rightarrow x=2 \end{cases} \quad \text{برخورد با محور xها}$$

$$\Rightarrow 2 + 4 + 8 = 14$$